清华大学

决策方法论

2023 年秋季学期

## 作业 3

杨哲涵 2024 年 12 月 28 日

**1** 概率和似然性的不同在于, 给定某种概率模型后, 概率会给出在指定模型参数后不同观测结果对应的可能性, 似然性会给出指定观测数据后不同模型参数对应的可能性.

**2** 最大似然估计是指找到让似然函数取值最大的模型参数. 即根据已知的观测数据, 以及某种已选定的概率模型的似然函数, 寻找该似然函数取最大值时的模型参数.

**3**

- 随机变量 $X_i$ 的概率质量为

$$P(X_i) = \begin{cases} \pi, X_i = 1 \\ 1-\pi, X_i = 0 \end{cases}$$

- 已知 $n$ 次伯努利实验的似然函数为

$$L(\pi) = \pi^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\pi)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

  那么取对数后有

$$l(\pi) = \ln L(\pi) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(\pi) + (n - \sum_{i=1}^n x_i)\ln(1-\pi)$$

- 令 $\frac{\partial l}{\partial \pi} = 0$, 可以得到 $\hat{\pi} = \sum_{i=1}^n x_i/n$
- 计算可得 $l''(\hat{\pi}) = -n(1/\hat{\pi} + 1/(1-\hat{\pi}))$, 因此方差为

$$Var(\hat{\pi}|X) = -\frac{1}{l''(\hat{\pi})} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n} = \frac{\hat{\pi}^2(1-\hat{\pi})}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

- 可以算得

$$\hat{\pi} = 0.8, Var(\hat{\pi}|X) = 0.032 \quad \text{情况 1}$$
$$\hat{\pi} = 0.8, Var(\hat{\pi}|X) = 0.00032 \quad \text{情况 2}$$

**4**

- 中国队取胜的发生比为 $p/(1-p)=19$, 对数发生比为 $\ln(19)\approx 2.944$
- 使用优势在于可以将乘法转化为加法, 减少了数值计算的精度损失, 此外对数发生比还可以将 $(0,1)$ 映射到 $(-\infty,\infty)$.

**5**

- 随机成分为因变量 (响应变量)$Y$ 为服从泊松分布的随机变量, 期望为 $\lambda$. 系统性成分为多个解释变量, 利用解释变量的线性组合来估计响应变量 $Y$ 的期望. 链接函数为 log 函数.
- 对数形式的似然函数为
$$L(\vec{\boldsymbol{\beta}})=\sum_{i=1}^{n}(y_i\vec{\boldsymbol{x_i}}^T\vec{\boldsymbol{\beta}}-e^{\vec{\boldsymbol{x_i}}^T\vec{\boldsymbol{\beta}}}-\log(y_i!))$$
- 最大似然估计方程为
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-e^{\vec{\boldsymbol{x_i}}^T\vec{\boldsymbol{\beta}}})\vec{\boldsymbol{x_i}}=0$$