分析力学部分习题答案

杨哲涵, 郑济东

2024 年 12 月 28 日

所有答案编号对应物理系李岩松老师分析力学讲义, 正确性只经过有限的检验, 可能存在错误, 欢迎提出 PR 修正补充.

1 第一章习题

1.1 约束和自由度

1 自行车共有 6 个自由度, 附加 1 个非完整约束 (后轮角速度与车架质心速度).

2 过程略

1. 是非完整约束
2. 是非完整约束
3. 是非完整约束

1.2 虚功原理

6 设广义坐标 θ 为杆与竖直方向的夹角.

1. 平衡位置为 $\theta = \arcsin\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}$, 该处 $\delta^2 W = -\cos\theta(2d\sin^{-3}\theta - \frac{l}{2})(\delta)^2 < 0$, 因此是稳定平衡.
2. 假设解除墙面约束, 设广义坐标为 α, θ, 有 $\delta W = (mg\sin\theta(\frac{l}{2} - a))\delta\theta + (mg\cos\theta - F\sin\theta)\delta\alpha$, 可以解得 $\sin\theta = \sqrt[3]{\frac{2d}{l}}, F = \frac{mg}{\tan\theta}$.

7 解除上下 4 根杆的长度约束, 令中间杆长度仍然固定. 设广义坐标 ϕ 为 2 杆与水平方向的夹角, 上方两杆的拉力为 F, 下方两杆的拉力为 T. 由 $\delta W = (P + 2T\sin\phi)\delta(2d\tan\phi) + 2F\delta\sqrt{(d - 2d\tan\phi)^2 + (2d)^2}$, 令 $\phi = 0$(对应题目所给位形), 可解得 $F = \frac{\sqrt{5}}{2}P, T = -P$. 因此 1 杆受压力 P.

8 $\theta = 0$ 为平衡位置, 有 $\delta^2 W = \frac{mgl}{2\tan\alpha}(\delta\theta)^2 > 0$, 不是稳定平衡.

11 设曲面方程为 $y = f(x)$, 设广义坐标为 r, θ, 两球的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

1. 曲面方程与平衡位形 $(r, \theta = 0)$ 关系为 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l-r}{f(x) + \frac{x}{f'(x)}}, x^2 + f(x)^2 = (l-r)^2$
2. $m_1\sqrt{x^2 + y^2} = -m_2 y + C$

14 参考讲义, 可得两端固定对虚位移的约束为

$$\int_0^l \frac{\delta y}{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \,\mathrm{d}s = 0$$

设单位水平间距载荷为 α, 虚功为

$$\delta W = \int_0^l \frac{\alpha}{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}} \,\delta y \,\mathrm{d}s$$

由拉格朗日乘子法

$$\int_0^l \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) \delta y \,\mathrm{d}s = 0$$

解得 $y = \frac{\alpha}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$, 形状为抛物线.

2 第二章习题

2.1 达朗贝尔原理

2 设杆长为 $2l$, 广义坐标为 α, 由达朗贝尔原理

$$\delta W = mgl\sin\alpha\,\delta\alpha - m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\delta\vec{\mathbf{r}} - I\ddot{\theta}\,\delta\theta$$

解得 $\ddot{\alpha} = \frac{3g}{4l}\sin\alpha$, 根据牛顿力学可算出墙面支持力为 $\frac{3}{4}mg\sin\alpha\cos\alpha$, 地面支持力 $(1-\frac{3}{4}\sin^2\alpha)mg$.

2.2 拉格朗日力学

5 广义势函数 $V = \vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{p}}) = m\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}})$

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = 2m(\sigma_y\dot{z} - \sigma_z\dot{y}) \\
Q_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} = 2m(\sigma_z\dot{x} - \sigma_x\dot{z}) \\
Q_z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial V}{\partial z} = 2m(\sigma_x\dot{y} - \sigma_y\dot{x})
\end{aligned}$$

即 $\vec{\boldsymbol{Q}} = 2\vec{\boldsymbol{\sigma}}\times\vec{\boldsymbol{p}}$, 这在球坐标下也成立.

7 解拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ 有

$$\begin{aligned}
a\ddot{x} + b\ddot{y} + \frac{k}{m}(ax+by) &= 0 \\
b\ddot{x} + c\ddot{y} + \frac{k}{m}(bx+cy) &= 0
\end{aligned}$$

1. 系统运动方程为

$$\begin{pmatrix} A_1\sin(\omega t+\phi_1) \\ A_2\sin(\omega t+\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad 其中 \quad \omega = \frac{k}{m}$$

8

3 第三章习题

3.1 非完整约束

3.2 拉格朗日方程的应用

2

5

6

7

3.3 耗散函数

9

4 第四章习题

4.1 变分极值问题

1 直线应满足 $\rho\ddot{\rho} = 2\dot{\rho}^2 + \rho^2$

2

5

4.2 最小作用量原理

10

4.3 诺特定理

11

4.4 罗斯函数与罗斯方程

15

18

5 第五章习题

5.1 有心力

2

3

5

7

9

10