射线源导论作业

杨哲涵

1. LEC-3

1.1. 重复 Richardson-Dushman 的推导过程

Richardson 定律为

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

其中J是热发射电流密度,A为常数系数,T为温度,k为玻尔兹曼常数,W为材料的功函数.

首先考虑作为费米子的电子的分布规律

$$f_{\mathrm{FD}}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} - 1}$$

其中费米能级

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$$

在发生热发射时, $E - E_F \gg kT$, Fermi-Dirac 分布退化为 Boltzmann 分布

$$f_{\mathrm{FD}}(E) \approx f_B(E) = e^{-(E-E_F)/(kT)}$$

为了得到热发射电流密度与温度的关系,需要考虑不同速度电子的能量分布,使用自由电子气模型.考虑长宽高分别为L_x, L_y, L_z的矩形空间,波函数形式为

$$\Psi(x,y,z) = \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \text{ where } k_\alpha L_\alpha = \pi n_\alpha$$

在波矢空间(k空间)中,满足$-N_x \le n_x \le N_x, -N_y \le n_y \le N_y, -N_z \le n_z \le N_z$的$k_x, k_y, k_z$组成的体积为

$$V_k = \frac{2\pi N_x}{L_x}\frac{2\pi N_y}{L_y}\frac{2\pi N_z}{L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V} N_x N_y N_z$$

另外,考虑电子的自旋,1 个波矢对应 2 个电子能态,则$-N_x \le n_x \le N_x, -N_y \le n_y \le N_y, -N_z \le n_z \le N_z$内的电子能态数目为

$$S_k = 2N_x N_y N_z$$

从而k空间中,电子能态密度为

$$g(k) = \frac{1}{V_k/S_k} = \frac{2V}{(2\pi)^3}$$

利用波矢k与动量p之间的关系

$$p = \hbar k$$

在p空间体积元内的电子能态数目为

$$\mathrm{d}S = \frac{2V}{h^3}\,\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z$$

得到上面的式子后,可以将其与能量建立关系,在非相对论近似下,电子动能可以是

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

对于速度空间元,对应的电子数目为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N &= f(E)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/(2kT)}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z\end{aligned}$$

从而速度空间元内的电流密度(只有z方向能发射)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J &= ev_z\,\mathrm{d}N \\ &= ev_z \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/(2kT)}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z\end{aligned}$$

对v_x, v_y, v_z积分后可得总电流密度J,其中$v_{z0} = \sqrt{2\frac{E_F+W}{m}}$

$$\begin{aligned}J &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_x \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_y \int_{v_{z0}}^{+\infty}\mathrm{d}v_z\, ev_z \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/(2kT)}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z \\ &= \frac{4\pi emk^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{W}{kT}} \\ &= AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}\end{aligned}$$

1.2. 如果对热阴极电流密度的稳定性要求优于 1%,对其温度稳定性和功函数的变化分别有什么要求?

考虑电流密度对温度与功函数的依赖关系

$$\frac{\partial J}{\partial T} = Ae^{-\frac{W}{kT}}\left(2T + \frac{W}{k}\right)$$

由于$\frac{W}{k}$远大于T,可以近似为

$$\mathrm{d}J \approx A\frac{W}{k} e^{-\frac{W}{kT}}\,\mathrm{d}T$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{J} = \frac{W}{k}\frac{1}{T^2}\,\mathrm{d}T$$

类似地有

$$\frac{\mathrm{d}J}{J} = -\frac{1}{kT}\,\mathrm{d}W$$

在稳定性优于 1% 的要求下,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}T}{T}\right| \leq 0.01\frac{k}{W}$$

$$|\mathrm{d}W| \leq 0.01kT$$

1.3. 画出 100-2000 摄氏度下Cu, Ag, Au, W, LaB_6的电流密度随温度的变化曲线

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

materials = ["Cu", "Ag", "Au", "W", "LaB6"]
work_functions = [4.7, 4.26, 5.1, 4.55, 2.7]
temp_start = 100
temp_end = 2000
temp_step = 1
temps = np.arange(temp_start, temp_end,
temp_step)
k = 1.38e-23
e = 1.6e-19
a = 1.202e6

for i in range(len(materials)):
    currents = []
    for temp in temps:
        currents.append(a * temp**2 * np.exp(-
work_functions[i] * e / (k * temp)))
    currents = np.array(currents) * 1e3
    plt.plot(temps, currents,
label=materials[i])

plt.xlabel("Temperature (K)")
plt.ylabel("Log of J (mA/m^2)")
plt.yscale("log")
plt.legend()
plt.show()
```

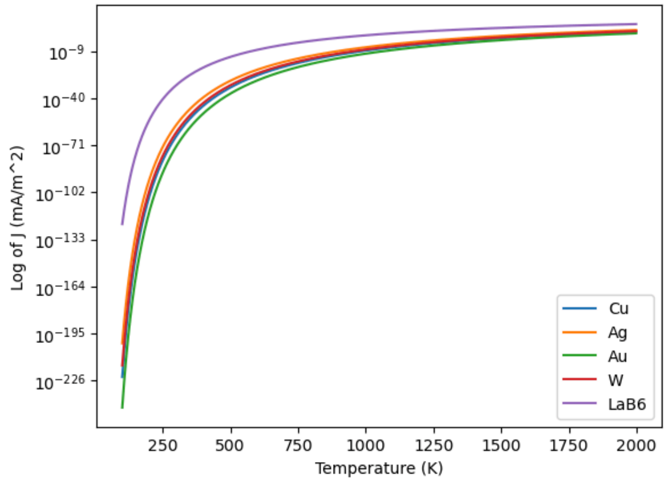

圖 1