群论笔记

adamanteye

1. 群的基本概念

1.1. 群

定义 1 **群**: 设 G 是一些元素的集合,记为 $G = \{\dots, g, \dots\}$,如果 G 中定义的二元运算 $a * b$ 满足下面条件:

1. 封闭性: $\forall a, b \in G, a * b \in G$
2. 结合律: $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
3. 单位元: 存在 e ,使得 $\forall f \in G, e * f = f * e = f$
4. 逆元存在: $\forall f \in G, \exists f^{-1} \in G, f^{-1} * f = f * f^{-1} = e$

那么称 G 是一个群.

推论 1.1: 对于群 G 有:

- 单位元是唯一的
- $\forall a \in G$,逆元 a^{-1} 是唯一的

例 2 **空间反演群**: 定义 E 作用在三维欧氏空间的向量 $\vec{r}$ 上得到 $\vec{r}$. I 作用在 $\vec{r}$ 上得到 $-\vec{r}$.

那么 $\{E, I\}$ 形成一个群,称为空间反演群.

例 3 **n 阶置换群**:

例 4 **D_3 群**:

例 5 **整数群**: 定义加法为整数集合中的二元运算,那么全体整数构成一个群.

定义 6 **群的阶**: 记 $|G|$ 为群内元素的个数,称为群的阶.

群的阶有限时,称为**有限群**.反之称为**无限群**.

定义 7 **Abel 群**: 当群的二元运算可以交换时,称为Abel 群.

例 8 **整数模 n 加法群**: 记为 $(\mathbb{Z}_n, +)$

定理 9 **重排定理**: 对 $\forall u \in G$,当 g_α 取遍 G 中所有元素时,有 $u * g_\alpha$ 不重复地给出 G 中所有元素.

证明: 首先证明可给出所有元素:

对 $\forall g_\beta \in G$,可以取 $g_\alpha = u^{-1}g_\beta \in G$.

其次反证法证明不重复:

设有 $g_\alpha \neq g_{\alpha'}$,使得 $u * g_\alpha = u * g_{\alpha'}$,则有 $u^{-1} * u * g_\alpha = u^{-1} * u * g_{\alpha'}$,得出 $g_\alpha = g_{\alpha'}$,矛盾. ■

1.2. 子群与陪集

定义 10 **子群**: 设 H 是群 G 的一个子集,若 H 在与群 G 相同的二元运算上同样构成一个群,那么 H 是 G 的子群.

G 和 $\{e\}$ 称为 G 的**平凡子群**.我们往往关心非平凡子群.

例 11 **n 阶循环群**: n 阶循环群形如

$$\{a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n\}, a^n = e.$$

这样的群是Abel 群.

对于6阶循环群, $\{a^2, a^4, e\}$ 与 $\{a^3, e\}$ 是非平凡子群.

定理 12 **子群的判定**: 设 $H \subseteq G$,若满足以下条件,那么 H 是 G 的子群.

- H 非空
- $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$

例 13: 对于加法运算,整数全体形成的群是实数全体形成的群的子群.

定义 14 **群元的阶**: 对于有限群 G ,取出元素 a ,基于 a 做幂运算,总是可以构成 G 的一个循环子群 $Z_k = \{a, a^2, \dots, a^{k-1}, a^k = e\}$.

称满足上述性质的最小的 k 为群元 a 的阶.

1.3. 类与不变子群

1.4. 同构与同态

1.5. 变换群

1.6. 直积与半直积

2. 群表示理论

3. 群论与量子力学