

不等式

Hash

1. 平均函数

$$f(n; a, b) = \begin{cases} a & \text{where } a = b \\ \frac{n}{n+1} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} & \text{where } a > 0 \wedge b > 0 \wedge a \neq b \end{cases} \quad (1)$$

$a \neq b$ 时,具有以下特征:

- 单调递增(求简练的证明)
- 与 a, b 均正相关
- 特殊地,当 a, b 都变为原来的 n 倍时, $f(n; a, b)$ 也变为原来的 n 倍
- $\min\{a, b\} < f(n; a, b) < \max\{a, b\}$

取 $n = -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1^1$,得

$$\frac{2ab}{a+b} < \frac{ab(\ln a - \ln b)}{a-b} < \sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b+\sqrt{ab}}{3} < \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

其中便出现了众所周知的调和平均,几何平均,对数平均和代数平均.

$$f(-2) < f(-1) \iff f(0) < f(1)$$

$$f(-1) < f\left(-\frac{1}{2}\right) \iff f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(0) \quad (3)$$

因此 $f(-1)$ 的不等式可以由对数平均直接得出.

原式亦可写为定积分形式,但不知道有什么用.

感谢 [Alan](#) 和 p 同学的启发.²

2024 年夏,我询问 ChatGPT 得知性质类似的 [Stolarsky 平均](#),发现拉格朗日定理与之的关联,并终于听说 1989 年即有人发现了此规律,相关资料总结在《常用不等式》第 4 版 55 页.这份文档看来不会发表了,且留作纪念.

¹-1和0需要使用洛必达

²2022 年 9 月 13 日(手稿上标注的日期),我第二次学到对数平均,产生了一个疑问:几何平均和代数平均都显然由两数“各贡献一半”,因此均值显然在两数之间,但对数平均就不是这样,那应如何理解“平均”?

Alan 表示,他觉得“两个数之差除以两个数之差”可能更接近平均的“本质”.又随口一提, $\frac{a+b}{2}$ 不就可以写成 $\frac{1}{2} \frac{a^2-b^2}{a-b}$ 吗?

我大受震撼,和 p 同学聊了聊,他提示我平均函数一定是一次的.

于是晚上我捣鼓了一个多小时,从 $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$ 开始,令 $n = 3, b = 1, a \rightarrow 1$,利用立方差约去 $a - 1$ 后得到 $\frac{4}{3}$.因为1和1的平均数应当是1,经实验,我猜想应补充参数 $\frac{n}{n+1}$,便有了上式. n 不为正整数之时,补充此参数的道理仍未知——不过这样挺管用.