

射线源导论作业

adamanteye

1. LEC-3

1.1. 重复 Richardson-Dushman 的推导过程

Richardson 定律为

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

其中 J 是热发射电流密度, A 为常数系数, T 为温度, k 为玻尔兹曼常数, W 为材料的功函数.

首先考虑作为费米子的电子的分布规律

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} - 1}$$

其中费米能级

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$

在发生热发射时, $E - E_F \gg kT$, Fermi-Dirac 分布退化为 Boltzmann 分布

$$f_{FD}(E) \approx f_B(E) = e^{-(E-E_F)/(kT)} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{v_{z0}}^{+\infty} dv_z ev_z \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} dv_x dv_y dv_z$$

为了得到热发射电流密度与温度的关系, 需要考虑不同速度电子的能量分布, 使用自由电子气模型. 考虑长

宽高分别为 L_x, L_y, L_z 的矩形空间, 波函数形式为 $\Psi(x, y, z) = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$ where $k_\alpha L_\alpha = \pi n_\alpha$

在波矢空间(k 空间)中, 满足 $-N_x \leq n_x \leq N_x, -N_y \leq n_y \leq N_y, -N_z \leq n_z \leq N_z$ 的 k_x, k_y, k_z 组成的体积为

$$V_k = \frac{2\pi N_x}{L_x} \frac{2\pi N_y}{L_y} \frac{2\pi N_z}{L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V} N_x N_y N_z$$

另外, 考虑电子的自旋, 1 个波矢对应 2 个电子能态, 则 $-N_x \leq n_x \leq N_x, -N_y \leq n_y \leq N_y, -N_z \leq n_z \leq N_z$ 内的电子能态数目为

$$S_k = 2N_x N_y N_z$$

从而 k 空间中, 电子能态密度为

$$g(k) = \frac{1}{V_k/S_k} = \frac{2V}{(2\pi)^3}$$

利用波矢 k 与动量 p 之间的关系

$$p = \hbar k$$

在 p 空间体积元内的电子能态数目为

$$dS = \frac{2V}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

得到上面的式子后, 可以将其与能量建立关系, 在非相对论近似下, 电子动能可以是

$$E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

对于速度空间元, 对应的电子数目为

$$dN = f(E) dS = \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} dv_x dv_y dv_z$$

从而速度空间元内的电流密度(只有 z 方向能发射)

$$dJ = ev_z dN = ev_z \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/(kT)} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} dv_x dv_y dv_z$$

对 v_x, v_y, v_z 积分后可得总电流密度 J , 其中 $v_{z0} = \sqrt{2\frac{E_F+W}{m}}$

1.2. 如果对热阴极电流密度的稳定性要求优于 1%, 对其温度稳定性和功函数的变化分别有什么要求?

考虑电流密度对温度与功函数的依赖关系

$$\frac{\partial J}{\partial T} = A e^{-\frac{W}{kT}} \left(2T + \frac{W}{k} \right)$$

由于 $\frac{W}{k}$ 远大于 T , 可以近似为

$$dJ \approx A \frac{W}{k} e^{-\frac{W}{kT}} dT$$

$$\frac{dJ}{J} = \frac{W}{k} \frac{1}{T^2} dT$$

类似地有

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{1}{kT} dW$$

在稳定性优于 1% 的要求下, 有

$$\left| \frac{dT}{T} \right| \leq 0.01 \frac{k}{W}$$

$$|dW| \leq 0.01kT$$

1.3. 画出 100-2000 摄氏度下Cu, Ag, Au, W, LaB₆的电流密度随温度的变化曲线

```
import
matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

materials = ["Cu", "Ag",
"Au", "W", "LaB6"]
work_functions = [4.7,
4.26, 5.1, 4.55, 2.7]
temp_start = 100
temp_end = 2000
temp_step = 1
temps =
np.arange(temp_start,
temp_end, temp_step)
k = 1.38e-23
e = 1.6e-19
a = 1.202e6

for i in
range(len(materials)):
    currents = []
    for temp in temps:

        currents.append(a
        * temp**2 *
        np.exp(-
        work_functions[i]
        * e / (k *
        temp)))
    currents =
    np.array(currents) *
    1e3
    plt.plot(temps,
    currents,
    label=materials[i])

plt.xlabel("Temperature
(K)")
plt.ylabel("Log of J
(mA/m^2)")
plt.yscale("log")
plt.legend()
plt.show()
```

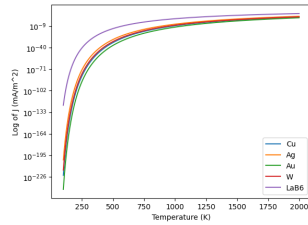


图 1