不等式

Hash

1. 平均函数

$$f(n;a,b)=\begin{cases}a & \text{where } a=b\\ \frac{n}{n+1}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} & \text{where } a>0\wedge b>0\wedge a\neq b\end{cases} \tag{1}$$

$a\neq b$时,具有以下特征:

- 单调递增(求简练的证明)
- 与a,b均正相关
- 特殊地,当a,b都变为原来的n倍时,$f(n;a,b)$也变为原来的n倍
- $\min\{a,b\}<f(n;a,b)<\max\{a,b\}$

取$n=-2,-1,-0.5,0,0.5,1$[1],得

$$\frac{2ab}{a+b}<\frac{ab(\ln a-\ln b)}{a-b}<\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b+\sqrt{ab}}{3}<\frac{a+b}{2} \tag{2}$$

其中便出现了众所周知的调和平均,几何平均,对数平均和代数平均.

$$f(-2)<f(-1)\Longleftrightarrow f(0)<f(1)$$
$$f(-1)<f\left(-\frac{1}{2}\right)\Longleftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0) \tag{3}$$

因此$f(-1)$的不等式可以由对数平均直接得出.

原式亦可写为定积分形式,但不知道有什么用.

感谢 Alan 和 p 同学的启发.[2]

2024 年夏,我询问 ChatGPT 得知性质类似的 Stolarsky 平均,发现拉格朗日定理与之的关联,并终于听说 1989 年即有人发现了此规律,相关资料总结在《常用不等式》第 4 版 55 页.这份文档看来不会发表了,且留作纪念.

---

[1] -1和0需要使用洛必达

[2] 2022 年 9 月 13 日(手稿上标注的日期),我第二次学到对数平均,产生了一个疑问:几何平均和代数平均都显然由两数“各贡献一半”,因此均值显然在两数之间,但对数平均就不是这样,那应如何理解“平均”?

Alan 表示,他觉得“两个数之差除以两个数之差”可能更接近平均的“本质”.又随口一提,$\frac{a+b}{2}$不就可以写成$\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a-b}$吗?

我大受震撼,和 p 同学聊了聊,他提示我平均函数一定是一次的.

于是晚上我捣鼓了一个多小时,从$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}$开始,令$n=3,b=1,a\to 1$,利用立方差约去$a-1$后得到$\frac{4}{3}$.因为1和1的平均数应当是1,经实验,我猜想应补充参数$\frac{n}{n+1}$,便有了上式.n不为正整数之时,补充此参数的道理仍未知——不过这样挺管用.